

# Recta



Representación de un segmento de recta.

En **geometría euclidiana**, la **recta** o la línea recta se extiende en una misma dirección, existe en una sola dimensión y contiene infinitos **puntos**; está compuesta de infinitos **segmentos** (el fragmento de **línea** más corto que une dos puntos). También se describe como la sucesión continua e indefinida de puntos en una sola dimensión, es decir, no posee principio ni fin.

Es uno de los **entes geométricos fundamentales**, junto al **punto** y el **plano**. Son considerados conceptos apriorísticos ya que su definición solo es posible a partir de la descripción de las características de otros elementos similares. Así, es posible elaborar definiciones basándose en los *postulados característicos* que determinan relaciones entre los entes fundamentales. Las rectas se suelen denominar con una letra **minúscula**.

En **geometría analítica** las líneas rectas pueden ser expresadas mediante una **ecuación** del tipo  $y = m x + b$ , donde **x**, **y** son variables en un **plano cartesiano**. En dicha expresión **m** es denominada la “pendiente de la recta” y está relacionada con la inclinación que toma la recta respecto a un par de ejes que definen el plano. Mientras que **b** es el denominado “término independiente” u “ordenada al origen” y es el valor del punto en el cual la recta corta al eje vertical en el plano.

## 1 Definiciones y postulados de Euclides relacionados con la recta

Euclides, en su tratado denominado *Los Elementos*,<sup>[1]</sup> establece varias definiciones relacionadas con la línea y la línea recta:

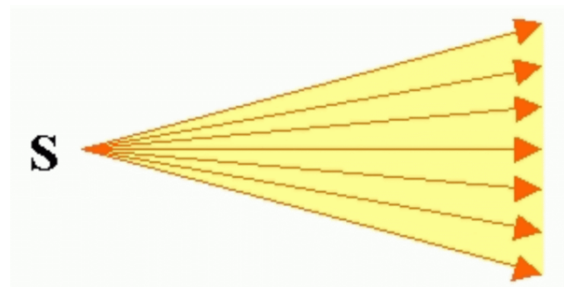
- Una línea es una **longitud** sin anchura (Libro I, definición 2).
- Los extremos de una línea son puntos (Libro I, definición 3).

- Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella (Libro I, definición 4).

## 2 Características de la recta

- La recta se prolonga indefinidamente en ambos sentidos.
- En **geometría euclidiana**, la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.
- La recta puede definirse como el conjunto de puntos situados a lo largo de la intersección de dos planos.

### 2.1 Semirrecta



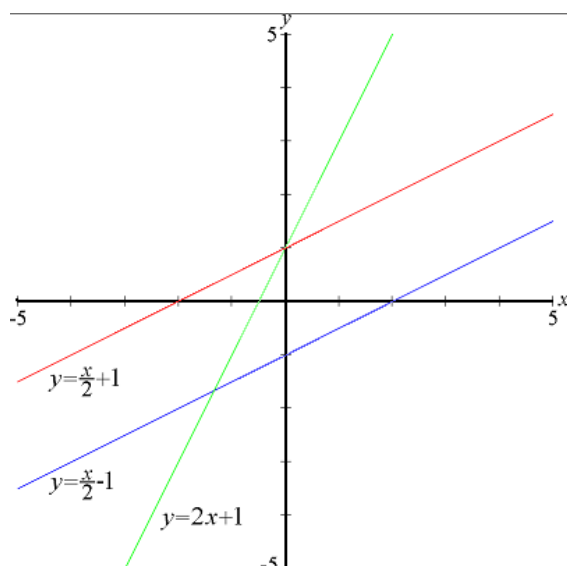
Haz de rayos.

Se le llama **semirrecta**<sup>[nota 1]</sup> a cada una de las dos partes en que queda dividida una recta al ser cortada en cualquiera de sus puntos. Es la parte de una recta conformada por todos los puntos que se ubican hacia un lado de un punto fijo de la recta, denominado *origen*, a partir del cual se extiende indefinidamente en una sola dirección.

### 2.2 Semirrecta opuesta

La **semirrecta opuesta** de una semirrecta es la otra semirrecta salida de la recta que define la primera.<sup>[5][6]</sup>

- Cada semirrecta solo tiene una semirrecta opuesta.
- Una semirrecta y su semirrecta opuesta tienen el mismo origen.



Tres líneas rectas — Las líneas roja y azul poseen la misma pendiente ( $m$ ) que en este ejemplo es  $1/2$ , mientras que las líneas roja y verde interceptan al eje  $y$  en el mismo punto, por lo que poseen idéntico valor de ordenada al origen ( $b$ ) que en este ejemplo es el punto  $x=0, y=1$ .

### 3 Ecuación de la recta en el plano

En un plano cartesiano, podemos representar una recta mediante una ecuación general definida en dicho plano ya sea mediante coordenadas usando puntos y vectores, o bien funciones que especifican dichas coordenadas.

#### 3.1 Pendiente y ordenada al origen

Dada una recta mediante un punto,  $P = (x_0, y_0)$ , y una pendiente  $m$ :

Se puede obtener la ecuación de la recta a partir de la fórmula de la pendiente (ecuación punto-pendiente):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

donde  $m$  es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas  $X$ .

##### 3.1.1 Ejemplo

La ecuación de la recta que pasa por el punto  $A = (2, -4)$  y que tiene una pendiente de  $m = -\frac{1}{3}$ :

$$x + 3y + 10 = 0$$

#### 3.2 Forma simplificada de la ecuación de la recta

Si se conoce la pendiente  $m$ , y el punto donde la recta corta al eje de ordenadas es  $(0, b)$ , podemos deducir, partiendo de la ecuación general de la recta,  $y - y_1 = m(x - x_1)$ :

Esta es la segunda forma de la ecuación de la recta y se utiliza cuando se conoce la pendiente y la ordenada al origen, que llamaremos  $b$ .

#### 3.3 Forma segmentaria de la ecuación de la recta (ecuación simétrica)

Recta que corta el eje ordenado en  $b$  y la abscisa en  $a$ .

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

#### 3.4 Ecuación general de la recta

Es la expresión  $Ax + By + C = 0$ ,<sup>[10]</sup>  $-A/B$  representa la pendiente y  $-C/B$  señala la ordenada en el origen en el caso de  $B$  diferente de cero. Datos suficientes para representar cualquier recta en el plano cartesiano XOY.

#### 3.5 Ecuación normal de la recta (primera forma)

La forma normal de la recta (Ecuación de Hesse):

$$x \cos \omega + y \sin \omega - d = 0$$

Siendo  $d$  el valor de la distancia entre la recta y el origen de coordenadas. El ángulo omega  $\omega$  es el ángulo entre la perpendicular a la recta y la parte positiva del eje de ordenadas.<sup>[11]</sup>

Si en lugar del ángulo de la normal  $\omega$  se emplea el ángulo de la recta  $\alpha$ , entre la recta y el eje de las ordenadas:

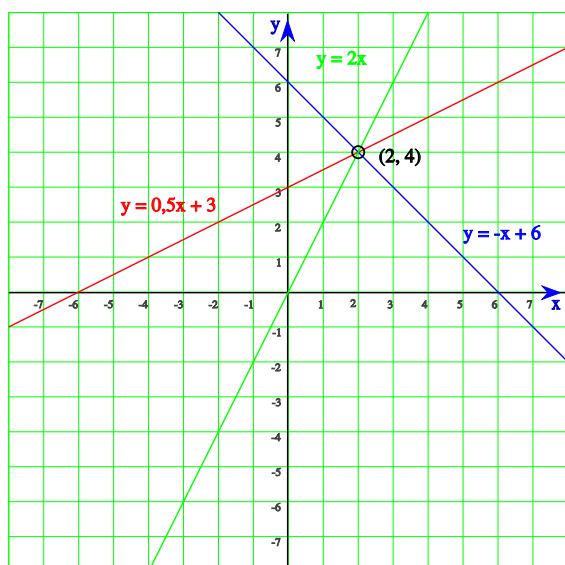
$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + d = 0$$

Siendo  $d$  el valor de la distancia entre la recta y el origen de coordenadas. El ángulo alfa  $\alpha$  es el ángulo entre la recta y la parte positiva del eje de ordenadas, cuya tangente expresa el valor de la pendiente de la recta.

#### 3.6 Ecuación normal de la recta (segunda forma)

Tomando el valor positivo o negativo de la raíz según corresponda.

### 3.7 Rectas que pasan por un punto



Rectas que pasan por el punto:  $(2, 4)$

Para determinar las rectas del plano que pasan por el punto  $P = (x_0, y_0)$  se usa la ecuación

$y = m(x - x_0) + y_0$  donde  $m$  toma cualquier valor real.

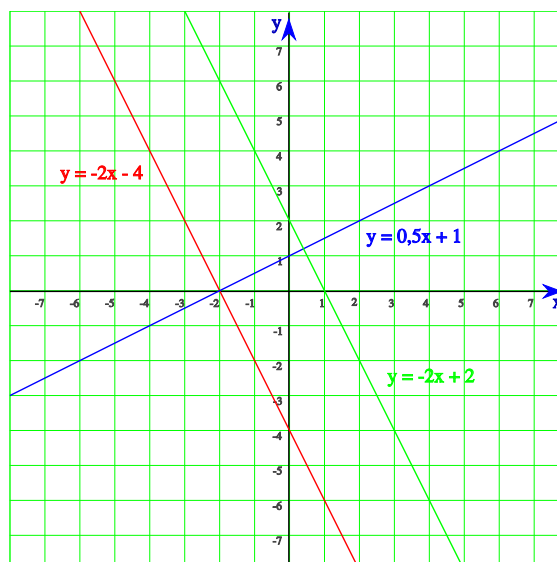
### 3.8 Recta que pasa por dos puntos

Si pasa por dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , la ecuación de la recta puede expresarse como:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

### 3.9 Rectas notables

- La ecuación de una recta vertical responde a la ecuación general  $x = x_v$  (constante).
- La ecuación de una recta horizontal responde a la ecuación general  $y = y_h$  (constante).
- Una recta trigonoidal que pase por el origen  $O(0, 0)$ , cumplirá la condición  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , siendo su ecuación:  $y = (m)(x)$ .
- Recta secante
- Recta tangente
- Dos rectas cualesquiera:



Rectas perpendiculares.

$$y = (m_1)(x) + b_1$$

$$y = (m_2)(x) + b_2$$

serán paralelas si y solo si  $m_1 = m_2$ . Además, serán coincidentes cuando:  $b_1 = b_2$

serán perpendiculares si y solo si  $m_1 = -1/m_2$ , es decir:  $(m_1)(m_2) = -1$

### 3.10 Rectas en el plano como espacio vectorial y afín

#### 3.10.1 Mediante dos puntos del plano afín

Dado dos puntos en el plano,  $P$  y  $Q$ , sobre una recta, se puede describir cada punto de ésta es decir toda la recta mediante la ecuación:

$$P + \lambda \vec{PQ} \text{ donde } \lambda \text{ puede tomar cualquier valor.}$$

**Ejemplo** Dados  $P = (1, 2)$  y  $Q = (3, 5)$ , entonces la recta son los puntos  $(x, y)$  tales que  $x = 1 + \lambda(3 - 1)$  y  $y = 2 + \lambda(5 - 2)$ .

#### 3.10.2 Mediante un punto y un vector

Dado un punto y un vector en el plano,  $P$  y  $\vec{v}$ , queda totalmente definida una recta mediante la ecuación:

$$P + \lambda \vec{v} \text{ donde } \lambda \text{ puede tomar cualquier valor.}$$

**Ejemplo** Dados  $P = (5, -2)$  y  $\vec{v} = (3, 1)$  (llamado vector director), entonces la recta son los puntos  $(x, y)$  tales que  $x = 5 + \lambda(3)$  y  $y = -2 + \lambda(1)$ .

### 3.10.3 Rectas notables

- La ecuación de una recta vertical poseería un vector director del tipo  $\vec{v} = (0, 1)$ .
- La ecuación de una recta horizontal poseería un vector director del tipo  $\vec{v} = (1, 0)$ .
- Una recta por el origen, es una recta que pasa por el origen de coordenadas con  $P = (0, 0) \in r$ .
- Dadas dos rectas cualesquiera

$$P + \lambda_1 \vec{v}$$

$$Q + \lambda_2 \vec{w}$$

serán **paralelas** si y solo si  $\vec{v} = \alpha \vec{w}$ .

serán **perpendiculares** si y solo si  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son perpendiculares, es decir su producto escalar es cero.

### 3.10.4 Rectas como producto escalar

Toda recta ya sea de forma implícita, explícita o vectorial se puede expresar como producto escalar de vectores:

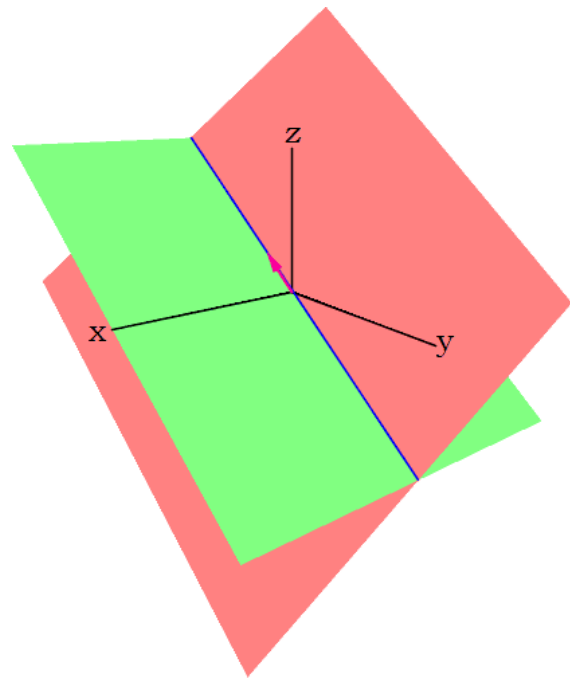
$$\begin{aligned} (x, y) &= (b_x, b_y) + \lambda(u_x, u_y) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x-b_x}{u_x} = \frac{y-b_y}{u_y} \Leftrightarrow \frac{x-b_x}{u_x} = \frac{y-b_y}{u_y} \Leftrightarrow \\ \frac{x}{u_x} + \frac{-y}{u_y} &= \frac{b_x}{u_x} + \frac{-b_y}{u_y} \Leftrightarrow (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{u_x} \\ \frac{-1}{u_y} \end{pmatrix} = \frac{b_x}{u_x} + \frac{-b_y}{u_y} \end{aligned}$$

es decir, renombrando las constantes:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c$$

- Si  $(x, y) \perp (a, b) \Rightarrow c = 0$  por tanto el vector  $(a, b)$  es perpendicular a la recta  $ax + by = 0$  y a sus vectores directores, y por tanto a todas sus paralelas.

## 4 Ecuación de la recta en el espacio



Sistema de 2 ecuaciones y 3 variables

### 4.1 Recta determinada mediante un sistema de ecuaciones

Recta en el espacio usando un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + 3z = 7 \end{cases}$$

- Esta ecuación equivale a la intersección de dos **planos** en el espacio.

### 4.2 Recta determinada mediante vectores

Recta en el espacio usando un punto,  $p = (p_x, p_y, p_z)$ , y un vector,  $u = (u_x, u_y, u_z)$ :

$$(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(u_x, u_y, u_z)$$

- Al vector  $u$  se le llama vector director.

#### 4.2.1 Posiciones relativas entre rectas

- Dos rectas serán **paralelas** si tiene vectores directores paralelos.
- Dos rectas serán coincidentes si comparten al menos dos puntos diferentes.
- Dos rectas se **intersecan** si no son paralelas y tienen un punto en común.

- Dos rectas serán **coplanarias**<sup>[5]</sup> si están contenidas en algún plano.
  - Dos rectas son coplanarias si y solo si o bien son coincidentes o bien se intersectan o bien son paralelas.
- Dos rectas se **cruzan**<sup>[nota 2]</sup> si no son paralelas ni tienen puntos comunes.

## 5 Véase también

- Punto
- Segmento
- Recta numérica
- Recta tangente
- Rectas antiparalelas
- Recta de regresión
- Recta proyectiva
- Plano
- Función lineal



## 6 Notas

- [1] También se usa **rayo** el cual es un posible anglicismo de *ray*<sup>[2]</sup> en Hispanoamérica. En algunos textos es mencionado como rayo o semirrecta<sup>[3]</sup> pero predomina el uso de semirrecta en abundante bibliografía<sup>[4][5][6][7][8][9]</sup> que no recoge otra alternativa.
- [2] También se dice **rectas alabeadas** el cual es un posible anglicismo en Hispanoamérica<sup>[3]</sup> pero predomina el uso de cruce de rectas en abundante bibliografía<sup>[13][5]</sup> hay quien recoge la alternativa no deseada de rectas oblicuas.<sup>[14]</sup>

## 7 Referencias

- [1] [www.euclides.org/](http://www.euclides.org/): *Los Elementos*
- [2] Weisstein, Eric W. «Ray». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- [3] «Pequeña enciclopedia de matemáticas». *una traducción del alemán* (Pagoulatos). 1981.
- [4] «semirrecta», *Diccionario de la lengua española* (22.ª edición), Real Academia Española, 2001, <http://lema.rae.es/drae/?val=semirrecta>.
- [5] Real Academia de Ciencias Exactas, Física y Naturales, ed. (1999). *Diccionario esencial de las ciencias*. Espsa. ISBN 84-239-7921-0.
- [6] *Diccionario de matemáticas*. Akal Editores. 1979.
- [7] *Docta guía educativa*. Carroggio,s.a.
- [8] *Enciclopedia didáctica de matemáticas*. Oceano.
- [9] *Léxico de matemáticas*. Akal Editores.
- [10] Geometría Analítica ( 1980) Charles Lehmann; Editorial Limusa, ISBN 968-18-176-3; pg. 65
- [11] R. Spiegel, Murray; Liu, John; Abellanas, Lorenzo (2000). «Cap 8 Fórmulas de geometría analítica plana». En McGraw-Hill Inc. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada* (2 edición). Madrid: Concepción Fernández. p. 20. ISBN 84-481-2554-1.
- [12] Wooton, William. *Geometría Analítica Moderna*. México 1979. P.p. 90
- [13] «cruzar», *Diccionario de la lengua española* (22.ª edición), Real Academia Española, 2001, <http://lema.rae.es/drae/?val=cruzar>.
- [14] *Geometría*(traducción). Thomson Editores Internacional.

## 8 Enlaces externos

-  Portal:Matemática. Contenido relacionado con **Matemática**.
-  Wikcionario tiene definiciones y otra información sobre ***recta***. Wikcionario
- Weisstein, Eric W. «Line». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- La Recta (Español)

## 9 Text and image sources, contributors, and licenses

### 9.1 Text

- **Recta** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/wiki/Recta?oldid=80056841> *Colaboradores:* Pino, Joseaperez, Oblongo, Sabbut, Moriel, Speedy-Gonzalez, Larocka, Lourdes Cardenal, Dovidena, Rumpelstiltskin, Mbarousse, Dodo, Sms, Cookie, Opinador, Elwikipedista, Tano4595, Renacimiento, Jsanchezes, Felipealvarez, Chalisimo5, Vargenau, Steve-o, Robotico, Dat, FAR, Alexv86, Airunp, Yrithind, Taichi, Rembiapo pohyiete (bot), Magister Mathematicae, Platonides, Unf, Alhen, Yrbot, BOT-Superzerocool, MI GENERAL ZAPATA, Zaka, GermanX, Wewe, Gaijin, Davidmh, Götz, Vbenedetti, Er Komandante, Chlewbot, Tomatejc, Filipino, Kuantto, Alfredobi, Rbonvall, BOTpolicia, Ricard Delgado Gonzalo, Adama, CEM-bot, Jorgelrm, KELPER, Damifb, JMCC1, Marianov, Retama, Baiji, Supermd, Eamezaga, Rastrojo, Rosarinagazo, Gafotas, Montgomery, FrancoGG, Fsd141, Escarbot, IrwinSantos, Ninovolador, Rrecillas, Isha, Bernard, JAnDbot, Segedano, BetBot, Gsrzdl, Hingelstein, Humberto, Netito777, Pólux, Dhidalgo, Uruk, Bucephala, VolkovBot, Snakeyes, Technopat, MemoC, Galandil, Penarc, Yasim, Matdrones, Miguel Moya Guirado, DJ Nietzsche, AlleborgoBot, Muro Bot, Edmenb, Gerakibot, SieBot, Ctrl Z, PaintBot, Carmin, Drinibot, Bjankuloski06es, BOTarate, Mel 23, Jorgelcs, Mafores, Tirithel, Locos epraix, Jarisleif, Javierito92, Dnu72, HUB, Antón Franchó, Kikobot, Nicop, Quijav, Lamunski, PixelBot, Eduardosalg, Neodop, Leonpolanco, Petruss, Juan Mayordomo, Rage, Raulshc, Açipni-Lovrij, Camilo, UA31, Armando-Martin, Taty2007, AVBOT, Elliniká, David0811, MastiBot, Chzelada, Angel GN, MarcoAurelio, SpBot, Diegusjaimes, DumZiBoT, Conocedor222, Pasmargo, Luckas-bot, Luisgdelarosa, Spirit-Black-Wikipedista, Centroamericano, Roinpa, FariBOT, Vic Fede, Markoszarrate, Djosser, Lizzeto, Nixón, Brunocardinale1992, SuperBraulio13, Ortisa, Manuel15, Xqbot, Jkbw, Dreitmen, Dossier2, Igna, BOTirithel, Gusbelluwiki, Aquiel, Jerowiki, Lungo, De big dady, PatruBOT, Rcamacho, TjBot, Proferichardperez, Foundling, Oscarfv93, Miss Manzana, Edslov, EmausBot, Tipar, Savh, ZéroBot, Grillitus, Chroiti cross, Chopinzone, Albertojuanse, Waka Waka, WikitanvirBot, Antonorsi, MerllwBot, Sebrev, Travelour, MetroBot, Vichock, Acratta, Heroes of magic 5, Chuwaka, Rosythia, Sniborx, Helmy oved, Legobot, Daniel diaz .m, Sinforoso1234, Lautaro 97, Jean70000, Julian Grillo, Rfornas, Porpochis, JacobRodrigues, Falkondvd, Jarould, Matia y Anónimos: 445

### 9.2 Images

- **Archivo:Faisceau\_divergent.png** *Fuente:* [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/de/Faisceau\\_divergent.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/de/Faisceau_divergent.png) *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* ? *Artista original:* ?
- **Archivo:FuncionLineal05.svg** *Fuente:* <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/94/FuncionLineal05.svg> *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* HiTe 22:08, 10 May 2008 (UTC)
- **Archivo:FuncionLineal09.svg** *Fuente:* <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/FuncionLineal09.svg> *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* HiTe 21:14, 10 May 2008 (UTC)
- **Archivo:IntersecciónEspacioVectorial.gif** *Fuente:* <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c4/Intersecci%C3%B3nEspacioVectorial.gif> *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Marianov
- **Archivo:Linear\_functions2.PNG** *Fuente:* [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/80/Linear\\_functions2.PNG](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/80/Linear_functions2.PNG) *Licencia:* CC-BY-SA-3.0 *Colaboradores:* ? *Artista original:* ?
- **Archivo:Limeline.jpg** *Fuente:* <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/76/Limeline.jpg> *Licencia:* Public domain *Colaboradores:* Trabajo propio *Artista original:* Astur1
- **Archivo:Nuvola\_apps\_edu\_mathematics-p.svg** *Fuente:* [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Nuvola\\_apps\\_edu\\_mathematics-p.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Nuvola_apps_edu_mathematics-p.svg) *Licencia:* GPL *Colaboradores:* Derivative of Image:Nuvola apps edu mathematics.png created by self *Artista original:* David Vignoni (original icon); Flamurai (SVG conversion)
- **Archivo:Wiktionary-logo-es.png** *Fuente:* <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/06/Wiktionary-logo-es.png> *Licencia:* CC BY-SA 3.0 *Colaboradores:* originally uploaded there by author, self-made by author *Artista original:* es:Usuario:Pybalo

### 9.3 Content license

- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0